Lineare Algebra

Simon Fuhrmann Christian M. Meyer

Axiome der Linearen Algebra

Im Folgenden sei V ein beliebiger K-Vektorraum und $\mathcal{P}$ eine Punktmenge. V und $\mathcal{P}$ bilden einen affinen Raum. Seien außerdem $U_1 = K^{m \times n}, U_2 = K^{n \times \ell}, U_3 = K^{\ell \times k}$ Matrizenräume von V.

Punkte

Vektoren antragen:	(A1)	$\forall\, \vec{v} \in V.\ \forall\, P, Q \in \mathcal{P}.$	$Q = \vec{v} + P$
Punktabstand:	(A2)	$\forall\, \vec{v} \in V.\ \forall\, P, Q \in \mathcal{P}.$	$\vec{v} = \overline{PQ} = Q - P$
Assoziativgesetz:	(A3)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\ \forall\, P \in \mathcal{P}.$	$(\vec{w} + \vec{v}) + P = \vec{w} + (\vec{v} + P)$
Neutralelement:	(A4)	$\forall\, P \in \mathcal{P}.$	$\vec{0} + P = P$

Vektoren

Assoziativgesetz:	(V1)	$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{u})$
Kommutativgesetz:	(V2)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
Neutralelement:	(V3)	$\exists\, \vec{0} \in V.\ \forall\, \vec{v} \in V.$	$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
Inverses:	(V4)	$\forall\, \vec{v} \in V.\ \exists\, -\vec{v} \in V.$	$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
Distributivgesetz:	(V5)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\ \forall r \in K.$	$r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$
Neutralelement:	(V6)	$\exists\, 1 \in K.\ \forall\, \vec{v} \in V.$	$1\vec{v} = \vec{v}$
Distributivgesetz:	(V7)	$\forall\, \vec{v} \in V.\ \forall\, r, s \in K.$	$(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$
Assoziativgesetz:	(V8)	$\forall\, \vec{v} \in V.\ \forall\, r, s \in K.$	$r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$

Skalare

Assoziativgesetz:	(R1)	$\forall\, x, y, z \in K$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
Neutralelement:	(R2)	$\exists\, 0 \in K.\ \forall\, x \in K.$	$0 + x = x$
Inverses:	(R3)	$\forall\, x \in K.\ \exists\, -x \in K.$	$x + (-x) = 0$
Kommutativgesetz:	(R4)	$\forall\, x, y \in K.$	$x + y = y + x$
Assoziativgesetz:	(R5)	$\forall\, x, y, z \in K.$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Neutralelement:	(R6)	$\exists\, 1 \in K.\ \forall\, x \in K.$	$1 \cdot x = x$
Distributivgesetz:	(R7)	$\forall\, x, y, z \in K.$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
Distributivgesetz:	(R8)	$\forall\, x, y, z \in K.$	$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$
Inverses:	(R9)	$\forall\, x \in K_{\neq 0}.\ \exists\, x^{-1} \in K.$	$x \cdot x^{-1} = 1$
Kommutativgesetz:	(R10)	$\forall\, x, y \in K.$	$x \cdot y = x \cdot y$

Matrizen

Distributivgesetz:	(M1)	$\forall\, A \in U_1.\ \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in K^n.$	$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}$
Assoziativgesetz:	(M2)	$\forall\, A \in U_1.\ \forall\, \vec{v} \in K^n.\ \forall\, r \in K.$	$A(r\vec{v}) = r(A\vec{v})$
		$\exists\, 0 \in K.\ \forall\, A \in U_1.$	$A0 = 0$
Distributivgesetze:	(M3)	$\forall\, A \in U_1.\ \forall\, B, C \in U_2.$	$A(B + C) = AB + AC$
		$\forall\, A, B \in U_1.\ \forall\, C \in U_2.$	$(A + B)C = AC + BC$
Assoziativgesetz:	(M4)	$\forall\, AU_1.\ \forall\, B \in U_2.\ \forall\, r \in K.$	$(rA)B = r(AB) = A(rB)$
Assoziativgesetz:	(M5)	$\forall\, AU_1.\ \forall\, B \in U_2.\ \forall\, C \in U_3.$	$A(BC) = (AB)C$
Neutralelemente:	(M6)	$\exists\, E_m \in K^{m \times m}.\ \forall\, A \in U_1.$	$E_m A = A$
		$\exists\, E_n \in K^{n \times n}.\ \forall\, A \in U_1.$	$AE_n = A$

Determinanten

Die Determinante dreier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als: $\langle\, \vec{u} \times \vec{v} \,|\, \vec{w}\,\rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Allgemein kann man die so genannte Determinantenform als eine Abbildung $\det\colon V \longrightarrow K$ auffassen, mit $A = (a_1, \cdots, a_n) \mapsto |A| = \det A = \det(a_1, \cdots, a_n)$. Axiome:

(D1)	$\forall\, a_\ell, b \in V.$	$\det(a_1, \cdots, a_i + b, \cdots, a_n) = \det(a_1, \cdots a_n) + \det(a_1, \cdots, b, \cdots a_n)$
(D2)	$\forall\, a_\ell \in V. \forall\, r \in K.$	$\det(a_1, \cdots, ra_j, \cdots, a_n) = r \det(a_1, \cdots, a_n)$
	$\forall\, a_\ell \in V. \forall\, r \in K.$	$\det(ra_1, \cdots, ra_j, \cdots, ra_n) = r^n \det(a_1, \cdots, a_n)$
(D3)	$\forall\, a_\ell \in V.$	$\det(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$
(D4)	$\exists\, E_n \in V.$	$\det(E_n) = \det(e_1, \cdots, e_n) = 1$
(D5)	$\forall\, a_\ell \in V.\ j \neq k$	$\det(a_1, \cdots, a_j + a_k, \cdots, a_n) = \det(a_1, \cdots, a_n)$
(D6)	$\forall\, a_\ell \in V.$	$\det(a_1, \cdots, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) = -\det(a_1, \cdots, a_{j+1}, a_j, \cdots, a_n)$

Weitere Eigenschaften von Determinaten

(1)	$\forall\, A, B \in K^{n\times n}.$	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(2)	$\forall\, A \in K^{n\times n}.$	$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist invertierbar
(3)	$\forall\, A \in K^{n\times n}.$	$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
(4)	$\forall\, A \in K^{n\times n}. \forall\, r \in K.$	$\det(rA) = r^n \det(A)$
(5)	$\forall\, A, S \in K^{n\times n}.$	$\det(S^{-1}AS) = \det(A)$
(6)	$\forall\, A \in K^{n\times n}.$	$\det(A) = \det A^t$
(7)	$\forall\, A, S \in K^{n\times n}.$	$\det(S^tAS) = \det^2(S)\det(A)$
(8)	$\forall\, a_\ell \in V.$	$\det(a_1, \cdots, a_n) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1, \cdots, a_n$ sind positiv orientiert.
	$\forall\, a_\ell \in V.$	$\det(a_1, \cdots, a_n) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1, \cdots, a_n$ sind negativ orientiert.
	$\forall\, a_\ell \in V.$	$\det(a_1, \cdots, a_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1, \cdots, a_n$ sind linear abhängig.

Determinante von 2×2-Matrizen

Die Determinante einer 2×2-Matrix berechnet sich aus der Differenz der Produkte von Haupt- und Nebendiagonale, also

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$$

Sarrus-Regel

Die **Sarrus-Regel** zur Bestimmung der Determinante von 3×3-Matrix besagt: Die Determinante ergibt sich aus der Subtraktion der Summe aller Nebendiagonalen von der Summe aller Hauptdiagonalen. Die Einträge der Diagonalen werden jeweils multipliziert.

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1$$

Entwicklung nach Zeilen oder Spalten

Der **Minor** $A^{k\wedge\ell}$ ist die $(n-1 \times n-1)$-Matrix, die man durch Weglassen der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte erhält:

Spaltenentwicklung: $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det(A^{i\wedge j})$

Zeilenentwicklung: $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det(A^{i\wedge j})$

Beispiel: $\det\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} = -0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 9 \cdot \det\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Das Beispiel zeigt, dass das Entwickeln nach Zeilen/Spalten, in denen sich ein Nulleintrag befindet, die Berechnung der Determinante erleichtert.

Vektorprodukt

Das Vektor- oder Kreuzprodukt $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist wie folgt definiert:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\varphi$$

Es gelten die folgenden Gesetze:

(G1)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$	$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \parallel \vec{w}$
(G2)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$	$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
(G3)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.\ \forall\, r \in K.$	$r(\vec{v} \times \vec{w}) = (r\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (r\vec{w})$
(G4)	$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$	$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
	$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$	$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

Grassmann'scher Entwicklungssatz: $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3. \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \langle\, \vec{u} \mid \vec{w} \,\rangle \vec{v} - \langle\, \vec{v} \mid \vec{w} \,\rangle \vec{u}$

Jacobi Identität: $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3. \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$

Lagrange: $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3. \quad \langle\, \vec{u} \times \vec{v} \mid \vec{w} \times \vec{s} \,\rangle = \langle\, \vec{u} \mid \vec{w} \,\rangle \langle\, \vec{v} \mid \vec{s} \,\rangle - \langle\, \vec{v} \mid \vec{w} \,\rangle \langle\, \vec{u} \mid \vec{s} \,\rangle$

Spatprodukt

Das Spatprodukt berechnet das Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats.

$$V_{\text{Spat}} = \langle\, \vec{u} \mid \vec{v} \times \vec{w} \,\rangle = \langle\, \vec{u} \times \vec{v} \mid \vec{w} \,\rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Koordinatentransformation

Basis $\alpha = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ mit $a_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \vec{b}_j$

Basis $\beta = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ mit $b_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{a}_j$

Transformation von β nach α:

$$\vec{v}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{v}^\beta = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \vec{v}^\beta$$

Transformation von α nach β:

$$\vec{v}^\beta = {}_\beta T_\alpha \vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \vec{v}^\alpha$$

Es gilt ${}_\beta T_\alpha = {}_\alpha T_\beta{}^{-1}$ beziehungsweise ${}_\alpha T_\beta = {}_\beta T_\alpha{}^{-1}$

Punktkoordinatentransformation: $P^\alpha = {}_\alpha T_\beta P^\beta + (O_\beta)^\alpha = {}_\alpha T_\beta P^\beta + O_\beta - O_\alpha$

Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig, wenn eine der folgenden Aussagen zutrifft:

(1) $\sum_{k=1}^n a_k \vec{b}_k = \vec{0}$ hat eine Lösung mit $\sum_{k=1}^n |a_k| \neq 0$

(2) $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) \neq 0$

(3) $\forall\, \vec{b}_k.\ \vec{b}_k \neq \sum_{i=1}^n a_i \vec{b}_i$ mit $a_i \in K$ und $i \neq k$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\phi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung mit $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$. Ein Vektor $\vec{u} \in V$ heißt **Eigenvektor** von ϕ (bzw. A) zum **Eigenwert** λ, falls folgendens gilt:

$$\phi(\vec{u}) = A\vec{u} = \lambda\vec{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda E)\vec{u} = 0$$

Das Bild des Vektors $\vec{u}$ lässt sich also als Streckung darstellen. Der zum Eigenwert λ gehörige **Eigenraum** E_λ ist die Menge aller Eigenvektoren zu λ:

$$E_\lambda = \{\vec{u} \in V \mid \phi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\} = \{\vec{u} \in V \mid (A - \lambda E)\vec{u} = 0\}$$

Die Dimension des Eigenraums E_{λ_i} ist die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i. Zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenräumen sind linear unabhängig.

Charakteristisches Polynom

Die Eigenwerte λ_i von ϕ sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms**:

$$\chi_A(\lambda) = \mathrm{ch}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es zu ϕ genau $n = \dim(\phi)$ Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$, denn das charakteristische Polynom zerfällt in genau n komplexe Linearfaktoren:

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)^{k_i} = 0$$

Die Zahl k_i gibt die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i an. Die geometrische Vielfachheit ist stets kleiner oder gleich der algebraischen, also gilt: $\dim(E_{\lambda_i}) \leq k_i$

Diagonalisierung

Die Matrix A besitzt bezüglich einer Basis β genau dann **Diagonalgestalt**, falls β eine Basis aus Eigenvektoren bildet und wenn gilt $\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim(A)$, die Summe der geometischen Vielfachheiten muss also gleich der Dimension der Abbildung sein.

Sei $\vec{v}_i \in E_{\lambda_i}$ ein Eigenvektor zu λ_i. Die Transformationsmatrix der Basis β ist gegeben durch die Matrix $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$. Die Diagonalmatrix D zu A ergibt sich aus den Eigenwerten von A: $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Diese Form ist bis auf die Reihenfolge der Eigenwerte eindeutig bestimmt. Es gilt:

$$A = SDS^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad D = S^{-1}AS$$

Besonderheiten

Eine Matrix in Diagonalform bietet einige Vorteile, wie beispielsweise die Berechnung von **Matrixpotenzen** oder das Bestimmen der **Euler'schen Funktion**. Für eine beliebige Matrix A und eine invertierbare Matrix S gelten:

(1) Potenzen: $\left(SAS^{-1}\right)^n = SA^nS^{-1}$
(2) Euler'sche Funktion: $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(A)S^{-1}$

Insbesondere gilt für eine Diagonalmatrix D:

$$D^m = \mathrm{diag}\left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)^m = \mathrm{diag}\left(d_1^m, d_2^m, \ldots, d_n^m\right)$$
$$\exp(D) = \exp(\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)) = \mathrm{diag}(\exp(d_1), \exp(d_2), \ldots, \exp(d_n))$$

Eine Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel ω besitzt immer die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = e^{\pm i\omega}$ sowie die Eigenvektoren $v_{1/2} = (\pm i, 1)^t$

Matrizen

Sei $A = (a_{k,\ell})_{k,\ell}$ eine $n \times n$-Matrix mit $k, \ell = 1, \dots, n$. Diese Matrix A hat die folgenden Eigenschaften und es existieren die folgenden assozierten Matrizen:

Transponierte Matrix:	$A^t = (a_{\ell,k})_{k.\ell}$
Konjugierte Matrix:	$\overline{A} = (\overline{a}_{k,\ell})_{k,\ell}$
Adjungierte Matrix:	$A^* = (\overline{a}_{\ell,k})_{k,\ell} = \overline{A}^t$
Inverse Matrix:	$\exists\, A^{-1}. \quad AA^{-1} = E = A^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$

A ist **reell**	$\Leftrightarrow$	$A^t = A^*$	
A ist **symmetrisch**	$\Leftrightarrow$	$A = A^t$	
A ist **hermitesch**	$\Leftrightarrow$	$A = A^*$	
A ist **normal**	$\Leftrightarrow$	$AA^* = A^*A$	
A ist **orthogonal**	$\Leftrightarrow$	$A^t = A^{-1} \quad \Leftrightarrow$	$AA^t = E = A^tA$
A ist **unitär**	$\Leftrightarrow$	$A^* = A^{-1} \quad \Leftrightarrow$	$AA^* = E = A^*A$
A ist **nilpotent**	$\Leftrightarrow$	$\exists\, k \in \mathbb{N}.$	$A^k = 0$
A ist **idempotent**	$\Leftrightarrow$	$\exists\, k \in \mathbb{N}.$	$A^k = A$
A ist **positiv definit**	$\Leftrightarrow$	$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$	$\vec{u}^t A \vec{v} > 0$
A ist **positiv semi-definit**	$\Leftrightarrow$	$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$	$\vec{u}^t A \vec{v} \geq 0$
A ist **negativ definit**	$\Leftrightarrow$	$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$	$\vec{u}^t A \vec{v} < 0$
A ist **negativ semi-definit**	$\Leftrightarrow$	$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$	$\vec{u}^t A \vec{v} \leq 0$
A ist **indefinit**	$\Leftrightarrow$	$\exists\, \vec{u}_{1/2}, \vec{v}_{1/2} \in V.$	$\vec{u}_1^t A \vec{v}_1 > 0$ und $\vec{u}_2^t A \vec{v}_2 < 0$

Inverse Matrizen

Eine Matrix A heißt **invertierbar** genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$. Für eine 2×2-Matrix ergibt sich die folgende Formel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Für beliebige Matrizen kann man den Gauss-Jordan-Algorithmus zur Invertierung verwenden. Hierbei transformiert man die um die Einheitsmatrix erweiterte Matrix A mit Hilfe des Gauss-Algorithmus, bis der linke Teil der Matrix zur Einheitsmatrix geworden ist:

$$\big(A \mid B\big) \quad \rightsquigarrow \quad \big(E \mid A^{-1}\big)$$

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbildungen

Bild und Kern

Der **Kern** einer Abbildung $\phi\colon V \longrightarrow W$ ist die Menge aller $v \in V$, die auf 0 abbilden. Das **Bild** einer Abbildung ist die Menge aller Bildpunkte.

$$\mathrm{Kern}(\phi) = \ker(\phi) = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$$
$$\mathrm{Bild}(\phi) = \mathrm{im}(\phi) = \{\phi(v) \mid v \in V\}$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Abbildung $\phi\colon V \longrightarrow W$ hat folgende Eigenschaften:

ϕ ist **injektiv**	$\Leftrightarrow$	$\forall\, v, w \in V.\quad \phi(v) = \phi(w) \Rightarrow v = w$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Kern}(\phi) = \{0\}$
ϕ ist **surjektiv**	$\Leftrightarrow$	$\forall\, w \in W.\, \exists\, v \in V.\quad \phi(v) = w$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Bild}(\phi) = W$
ϕ ist **bijektiv**	$\Leftrightarrow$	$\exists\, \phi^{-1}.\quad \phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_W$	$\Leftrightarrow$	ϕ ist injektiv und surjektiv
	$\Leftrightarrow$	$\exists\, \phi^{-1}.\quad \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_V$		

Lineare Abbildungen

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $\phi\colon V \longrightarrow W$ heißt **Linearform** oder **lineare Abbildung**, falls folgendes gilt:

(L1) $\forall\, \vec{v} \in V.\, \forall\, r \in K.\quad \phi(r\vec{v}) = r\phi(\vec{v})$
(L2) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\quad \phi(\vec{v} + \vec{w}) = \phi(\vec{v}) + \phi(\vec{w})$

Ist V endlichdimensional mit $\dim V = n$, kann man ϕ durch eine $n \times n$-Matrix A angeben so, dass $\phi(\vec{v}) = A\vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$ gilt.

Bilineare Abbildungen

Sei V ein K-Vektorraum. Eine **bilineare Abbildung** oder **Bilinearform** ist eine Abbildung $\Phi\colon V \times V \longrightarrow K$ für die gilt:

(L1) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\, \forall\, r \in \mathbb{R}.\quad \Phi(r\vec{v}, \vec{w}) = r\Phi(\vec{u}, \vec{w})$
$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\, \forall\, r \in \mathbb{R}.\quad \Phi(\vec{v}, r\vec{w}) = r\Phi(\vec{u}, \vec{w})$
(L2) $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.\quad \Phi(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \Phi(\vec{u}, \vec{w}) + \Phi(\vec{v}, \vec{w})$
$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.\quad \Phi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \Phi(\vec{u}, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{w})$

Ist V endlichdimensional mit $\dim V = n$, kann man Φ eindeutig durch eine $n \times n$-Matrix A angeben: $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v}^t A\vec{w}$. Diese Matrix nennt man **Gram-Matrix** von Φ.

Sesquilineare Abbildungen

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt **ζ-Sesquilinearform** mit einem *Automorphismus* ζ, falls gilt:

(L1) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\, \forall\, r \in K.\quad \Phi(r\vec{v}, \vec{w}) = r \cdot \Phi(\vec{u}, \vec{w})$
$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\, \forall\, r \in K.\quad \Phi(\vec{v}, r\vec{w}) = \zeta(r) \cdot \Phi(\vec{u}, \vec{w})$
(L2) $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.\quad \Phi(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \Phi(\vec{u}, \vec{w}) + \Phi(\vec{v}, \vec{w})$
$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.\quad \Phi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \Phi(\vec{u}, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{w})$

Ist $\zeta = \mathrm{id}_K$ ergibt sich eine *Linearform.* Häufig betrachtet man eine Sesquilinearform mit der Involution $\zeta(x) = x^*$ über dem Körper der *komplexen Zahlen.*

Morphismen

Eine strukturhaltende Abbildung zwischen algebraischen Strukturen nennt man **Morphismus** oder auch **Homomorphismus**. Die Menge aller Homomorphismen $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist ein Vektorraum. Im folgenden sei $\phi\colon V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus und V ein reeller Vektorraum:

ϕ ist ein **Homomorphismus**	$\Leftrightarrow$	ϕ ist eine lineare Abbildung.		
ϕ ist ein **Isomorphismus**	$\Leftrightarrow$	$\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$	und	ϕ ist bijektiv
ϕ ist ein **Epimorphismus**	$\Leftrightarrow$	$\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$	und	ϕ ist surjektiv
ϕ ist ein **Monomorphismus**	$\Leftrightarrow$	$\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$	und	ϕ ist injektiv
ϕ ist ein **Endomorphismus**	$\Leftrightarrow$	$\phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$		
ϕ ist ein **Automorphismus**	$\Leftrightarrow$	$\phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$	und	ϕ ist bijektiv

Transformationen

Sei α: b_1, b_2, b_3, O eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und sei $\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\psi(\vec{v}) = A\vec{v}$. Folgende Transformationsmatrizen A sind unter anderem möglich (für $r \in \mathbb{R}$):

Identität:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scherung von b_1 Richtung b_3:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Projektion auf b_1, b_2:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung an O:
$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Streckung an b_1:
$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Streckung an b_1, b_2:
$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Punktspiegelung in O:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Geradenspiegelung an b_1:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ebenenspiegelung an b_1, b_2:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Drehung um b_1:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Drehung um b_2:
$$\begin{pmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Drehung um b_3:
$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Affine Abbildungen

Mit Hilfe von affinen Abbildungen kann man **Verschiebungen (Translationen)** durchführen. Man unterscheidet hier zwischen Verschiebungen mittels *affinen* beziehungsweise *homogenen Koordinaten.*

Affine Koordinaten:	$\phi(\vec{v}) = A\vec{v} + P$
Homogene Koordinaten:	$\phi(\widetilde{\vec{v}}) = \widetilde{A\vec{v}}$

Will man für eine lineare Transformation ϕ eine Basis β verwenden, müssen sowohl das Urbild als auch das Bild transformiert werden. Homogene Koordinaten erlauben hier auch die Wahl eines neuen Ursprungs.

$${}_\alpha\phi_\alpha = {}_\alpha T_\beta \; {}_\beta\psi_\beta \; {}_\beta T_\alpha$$

Komplexe Zahlen

Kartesische Darstellung: Die kartesische Darstellung einer komplexen Zahl z ist die Koordinatendarstellung in der Gauß'schen Zahlenebene. Angegeben sind die Komponenten der Real- und der Imaginärachse.

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}.\ z = a + bi \in \mathbb{C}$

(1)	$\forall\, z, w \in \mathbb{C}.$	$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
(2)	$\forall\, z, w \in \mathbb{C}.$	$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
(3)	$\forall\, z \in \mathbb{C}.$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{bi}{a^2+b^2}$

Realanteil von z:	$\Re(z) = a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
Imaginäranteil von z:	$\Im(z) = b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
Betrag von z:	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

Konjugiert komplexe Zahl: Die zu z konjugierte Zahl $\overline{z}$ erhält man durch Spiegelung von z an der reellen Achse.

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}.\ \overline{z} = z^* = a - bi \in \mathbb{C}$

(1)	$\forall\, z, w \in \mathbb{C}.$	$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
(2)	$\forall\, z, w \in \mathbb{C}.$	$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
(3)	$\forall\, z \in \mathbb{C}.$	$\overline{\overline{z}} = z^{**} = z$

Polardarstellung: Die Polardarstellung einer komplexen Zahl z besteht aus der Länge (Betrag) des Vektors in der Gauß'schen Zahlenebene sowie dem eingeschlossenen Winkel von Vektor und reeller Achse.

$\forall\, z \in \mathbb{C}.\ z = \lvert z\rvert \cdot (\cos\omega + i \sin\omega) \qquad \text{mit } \omega = \arg(z)$

(1)	$\forall\, z, w \in \mathbb{C}.$	$z + w = \lvert z\rvert \cdot (\cos\omega + i\sin\omega) + \lvert w\rvert \cdot (\cos\gamma + i\sin\gamma)$
(2)	$\forall\, z, w \in \mathbb{C}.$	$z \cdot w = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert \cdot \big(\cos(\omega + \gamma) + i\sin(\omega + \gamma)\big)$
(3)	$\forall\, z \in \mathbb{C}.\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$	$z^n = \lvert z\rvert^n \cdot \big(\cos(n\omega) + i\sin(n\omega)\big)$

Lösung der Gleichung: $z^n = \lvert w\rvert \cdot (\cos\gamma + i\sin\gamma)$

$z_k = \sqrt[n]{\lvert w\rvert} \cdot \big(\cos(\frac{\gamma}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\gamma}{n} + \frac{2\pi k}{n})\big)$

Unitäre und euklidsche Räume

Ein **unitärer Raum** ist eine Struktur, die aus einem *Skalarprodukt* und einem *komplexen Vektorraum* besteht. Der **euklidsche Raum** besteht ebenfalls aus einem *Skalarprodukt*. Als Vektorraum wird hier allerdings ein *reeller Vektorraum* verwendet.

Eine Abbildung $\Phi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C},\ (v, w) \mapsto \langle\, v \,|\, w \,\rangle$ heißt **Skalarprodukt**. Es handelt sich um eine *Sesquilinearform* und ist damit semilinear im 1. Argument und linear im 2. Argument, außerdem ist es hermitesch und positiv definit. Es gelten die folgenden Axiome:

(E1)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\langle\, \vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle = \overline{\langle\, \vec{w} \,|\, \vec{v} \,\rangle}$
(E2)	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\ \forall\, z \in \mathbb{C}.$	$\langle\, z\vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle = \overline{z}\langle\, \vec{u} \,|\, \vec{w} \,\rangle$
	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\ \forall\, z \in \mathbb{C}.$	$\langle\, \vec{v} \,|\, z\vec{w} \,\rangle = z\langle\, \vec{u} \,|\, \vec{w} \,\rangle$
(E3)	$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\langle\, \vec{u} + \vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle = \langle\, \vec{u} \,|\, \vec{w} \,\rangle + \langle\, \vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle$
	$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\langle\, \vec{u} \,|\, \vec{v} + \vec{w} \,\rangle = \langle\, \vec{u} \,|\, \vec{v} \,\rangle + \langle\, \vec{u} \,|\, \vec{w} \,\rangle$
(E4)	$\forall\, \vec{v} \in V.$	$\langle\, \vec{v} \,|\, \vec{v} \,\rangle \geq 0$
	$\forall\, \vec{v} \in V.$	$\langle\, \vec{v} \,|\, \vec{v} \,\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = 0$
	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\langle\, \vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} \perp \vec{w}$

Satz des Pytagoras:	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\lvert\vec{v} + \vec{w}\rvert^2 = \lvert\vec{v}\rvert^2 + \lvert\vec{w}\rvert^2 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{v} \perp \vec{w}$
Cauchy-Schwarz:	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\lvert\langle\, \vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle\rvert \leq \lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert$
Dreiecksungleichung:	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\lvert\vec{v} + \vec{w}\rvert \leq \lvert\vec{v}\rvert + \lvert\vec{w}\rvert$
Projektion von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$:	$\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V.\ \exists\, \vec{w}^* \in V.$	$\vec{w}^* = \frac{\langle\, \vec{v} \,|\, \vec{w} \,\rangle}{\lvert\vec{v}\rvert^2}\vec{v}$