Analysis

Die wichtigsten Sätze und Regeln

Christian M. Meyer

Konvergenz

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent	$\Leftrightarrow$	$\forall\,\varepsilon > 0.\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}.\ \forall\,\ell > N_\varepsilon.$	$d(x_\ell, x) < \varepsilon$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise konvergent	$\Leftrightarrow$	$\forall\, x \in X.$	$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent	$\Leftrightarrow$	$\forall\,\varepsilon > 0.\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}.\ \forall\,\ell > N_\varepsilon.$	$d\big(f_\ell(x), f(x)\big) < \varepsilon$

Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X.

f ist stetig	$\Leftrightarrow$	$\forall\, x_n \in X.$	$f\big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$
f ist stetig in $u \in X$	$\Leftrightarrow$	$\forall\,\varepsilon > 0.\ \forall\, x \in X.\ \exists\,\delta > 0.$	$d_X(u, x) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y\big(f(u), f(x)\big) < \varepsilon$
f ist L-Lipschitz-stetig	$\Leftrightarrow$	$\forall\, u, v \in X.$	$d_Y\big(f(u), f(v)\big) \leq L \cdot d_X(u, v)$

Differenzierbarkeit

Seien V, W Banachräume, $U \subseteq V$ offen, $f\colon U \longrightarrow W$, $r > 0$, $\lambda\colon B_r(0) \longrightarrow W$ stetig mit $\lambda(0) = 0$ und $A\colon V \longrightarrow W$ linear.

f ist differenzierbar in $u \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, h \in U. \quad f(u+h) - f(u) = A(h) + ||h|| \cdot \lambda(h)$

Integrationsregeln

Partielle Integration:	$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{dx} = \big[f(x) \cdot g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{dx}$
Substitution:	$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\ \mathrm{dx} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ \mathrm{dt}$
Logarithmus-Regel:	$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{dx} = \big[\ln\lvert f(x)\rvert\big]_a^b$