Algebraische Strukturen

Christian M. Meyer

Gesetze in algebraischen Strukturen

In algebraischen Strukturen gelten bestimmte Gesetzmäßigkeiten oder Regeln, die man **Axiome** nennt. Aus diesen Axiomen lassen sich neue Formeln und Regeln herleiten.

Abgeschlossenheit:	(Ab$*$)	$\forall\, x, y \in M.$	$(x * y) \in M$
Assoziativgesetz:	(A$*$)	$\forall\, x, y, z \in M.$	$(x * y) * z = x * y * z = x * (y * z)$
Kommutativgesetz:	(K$*$)	$\forall\, x, y \in M.$	$x * y = y * x$
Neutralelement:	(N$*$)	$\exists\, e \in M.\, \forall\, x \in M.$	$x * e = x$
Inverses:	(I$*$)	$\forall\, x \in M.\, \exists\, y \in M.$	$x * y = e$
Distributivgesetz:	(D$*$)	$\forall\, x, y, z \in M.$	$x * (y + z) = x * y + x * z$

Strukturen mit einer Operation

Strukturen mit nur einer Operation heißen **Monoid** oder **Gruppe**, je nachdem welche Axiome erfüllt werden. Alle diese Strukturen bestehen aus einer *Menge* und einer *Verknüpfung.* Eine **kommutative Gruppe** heißt auch **Abel'sche Gruppe**.

Struktur:	*Halbgruppe*	*Monoid*	*Kommutativer Monoid*	*Gruppe*	*Abel'sche Gruppe*
Definition:	$(M; *)$	$(M; *, e)$	$(M; *, e)$	$(M; *, e, ^{-1})$	$(M; *, e, ^{-1})$
Gesetze:	(Ab$*$) (A$*$)	(Ab$*$) (A$*$) (N$*$)	(Ab$*$) (A$*$) (K$*$) (N$*$)	(Ab$*$) (A$*$) (N$*$) (I$*$)	(Ab$*$) (A$*$) (K$*$) (N$*$) (I$*$)
Beispiel:	$(\mathbb{N}; +)$	$(\mathbb{N}; \cdot, 1)$	$(\mathbb{N}; +, 0)$	$(\mathbb{Z}; \cdot, 1, ^{-1})$	$(\mathbb{Z}; +, 0, -)$

Strukturen mit zwei Operationen

Strukturen, die aus einer *Menge* und *zwei Verknüpfungen* bestehen, heißen **Ringe** oder **Körper**. Ein Ring besteht aus einer Gruppe der additiven und einem Monoid der multiplikativen Verknüpfung. Ein Körper dagegen wird aus einem additiven und kommutativen Ring und einer multiplikativen kommutativen Gruppe zusammengesetzt. In beiden Strukturen gilt außerdem das Distributivgesetz.

Struktur:	*Ring*		*Kommutativer Ring*		*Körper*	
Definition:	$(M; +, \cdot, e^{+}, e^{\cdot})$		$(M; +, \cdot, e^{+}, e^{\cdot})$		$(M; +, \cdot, e^{+}, e^{\cdot})$	
Gesetze:	(Ab$\cdot$) (A$\cdot$) (N$\cdot$) (D$\cdot$)	(Ab$+$) (A$+$) (N$+$) (I$+$)	(Ab$\cdot$) (A$\cdot$) (K$\cdot$) (N$\cdot$) (D$\cdot$)	(Ab$+$) (A$+$) (K$+$) (N$+$) (I$+$)	(Ab$\cdot$) (A$\cdot$) (K$\cdot$) (N$\cdot$) (I$\cdot$) (D$\cdot$)	(Ab$+$) (A$+$) (K$+$) (N$+$) (I$+$)
Beispiel:	$(\mathbb{R}^{m \times n}; +, \cdot, 0, E)$		$(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$		$(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$	

Zusammengesetzte Strukturen

Es gibt Strukturen, die aus anderen Strukturen zusammengesetzt sind, wie die Struktur des **K-Vektorraums** oder der **K-Algebra**. Beide diese Strukturen bestehen aus einem *Körper* (z.B. $\mathbb{R}$), der die so genannten **Skalare** beinhaltet und einer weiteren Struktur, der Struktur der **Vektoren**.

Vektorräume

Bei K-Vektorräumen ist diese Struktur der Vektoren eine *kommutative Gruppe* mit den Verknüpfungen der Addition. Außerdem ist eine Verknüpfung definiert, die einen Vektor mit einem Skalar multipliziert. In einem Vektorraum V über den Körper K gelten die folgenden Gesetze:

Abgeschlossenheit:	(Ab)	$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$(\vec{v} + \vec{w}) \in V$
		$\forall \vec{v} \in V. \forall r \in K.$	$r\vec{v} \in V$
Assoziativgesetz:	(V1)	$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{u})$
Kommutativgesetz:	(V2)	$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
Neutralelement:	(V3)	$\exists \vec{0} \in V. \forall \vec{v} \in V.$	$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
Inverses:	(V4)	$\forall \vec{v} \in V. \exists \vec{w} \in V.$	$\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$
Distributivgesetz:	(V5)	$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V. \forall r \in K.$	$r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w})$
Neutralelement:	(V6)	$\exists 1 \in K. \forall \vec{v} \in V.$	$1\vec{v} = \vec{v}$
Distributivgesetz:	(V7)	$\forall \vec{v} \in V. \forall r, s \in K.$	$(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$
Assoziazivgesetz:	(V8)	$\forall \vec{v} \in V. \forall r, s \in K.$	$r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$

Ein Beispiel für einen K-Vektorraum ist der Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ der Vektoren. Aber auch der abstrakte Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ (sowohl Zeilen- als auch Spaltenraum) ist ein Vektorraum. Es gibt natürlich noch viele weitere Beispiele.

Algebren

In der Struktur der K-Algebra gibt es außer der Vektoraddition auch eine multiplikative Verknüpfung der Vektoren. Die Struktur der Vektoren ist hier ein *Ring*, folglich wird der K-Vektorraum mit den folgenden Axiomen zu einer K-Algebra A erweitert:

Abgeschlossenheit:	(Ab)	$\forall \vec{a}, \vec{b} \in A.$	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \in A$
Assoziativgesetz:	(A1)	$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in A.$	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$
Assoziativgesetz:	(A2)	$\forall \vec{a}, \vec{b} \in A. \forall r \in K.$	$r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$
Neutralelement:	(A3)	$\exists \vec{e} \in A. \forall \vec{a} \in A.$	$\vec{a} \cdot \vec{e} = \vec{a}$

Ein Beispiel für eine K-Algebra ist die Menge der Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$. Hier sieht man auch, dass ein Vektorraum beziehungsweise eine Algebra nicht unbedingt aus Vektoren bestehen muss. Die Struktur der Vektoren kann eine Menge von Matrizen oder auch von Abbildungen sein.

Affine Räume

Ein **affiner Raum** besteht aus einem Punktraum $\mathcal{P}$ und einem K-Vektorraum V sowie einer Abbildung $\phi: V \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$. Es gelten die folgenden Axiome:

Antragen von Vektoren:	(A1)	$\forall \vec{v} \in V. \forall P, Q \in \mathcal{P}.$	$Q = \vec{v} + P$
Abstand zweier Punkte:	(A2)	$\forall \vec{v} \in V. \forall P, Q \in \mathcal{P}.$	$\vec{v} = \overline{PQ} = Q - P$
Assoziativgesetz:	(A3)	$\forall P \in \mathcal{P}. \forall \vec{v}, \vec{w} \in V.$	$(\vec{w} + \vec{v}) + P = \vec{w} + (\vec{v} + P)$
Neutralelement:	(A4)	$\exists \vec{0} \in V. \forall P \in \mathcal{P}.$	$P + \vec{0} = P$

Beispiel für einen affinen Raum ist der Anschaungsraum $\mathbb{R}^3$ mit den Punkten im kartesischen Koordinatensystem.